

Colles de Maths - semaine 7 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit $\alpha > 0$. Montrer que la formule $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha x}$ définit une fonction C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , et donner des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

Exercice 2 Montrer que la formule $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)$ définit une fonction C^∞ sur $] -1, +\infty[$, et déterminer des équivalents de f en -1 et $+\infty$.

Exercice 3

Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions

$$f_n(x) = (-1)^n \sin^{\circ n}(x)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ ($\circ n$ signifie composée n fois).

Exercice 4

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 5

Montrer que la suite de fonctions définies sur \mathbb{C} pour $n \geq 1$ par $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} .

Exercice 6

Montrer que tout fermé de \mathbb{R} est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 7

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers f sur \mathbb{R} . Que dire de f ?

Exercice 8

Soit $a < b$ et x_1, \dots, x_n des points distincts de $[a, b]$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une suite de polynômes qui coïncident avec f en les x_k et qui converge uniformément vers f .

Exercice 9

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales de degré au plus d , qui converge simplement sur \mathbb{R} . Montrer que la limite est une fonction polynomiale de degré au plus d , et que la convergence est uniforme sur tout compact de \mathbb{R} .